

# Estimation de la densité spectrale d'un champ aléatoire stationnaire continu par échantillonnage poissonnien

Simplice Kouadio KOUAKOU, Dominique DEHAY

Université de Rennes 2 -Haute Bretagne, Equipe de Statistique IRMAR

Place du Recteur Henry Le Moal, CS 24307, 35043 Rennes cedex

**Résumé:** Dans ce papier, nous étudions l'estimation de la densité spectrale d'un champ aléatoire stationnaire continu à l'aide d'un échantillonnage poissonnien. Sous certaines conditions de régularité sur les cumulants d'un tel champ, nous construisons un estimateur de sa densité spectrale et nous établissons la consistance en moyenne quadratique et la normalité asymptotique de celui-ci.

**Abstract:** In this paper we study the estimation of the spectral density function of a continuous stationary random field from Poisson sampling. Under regularity conditions on the cumulants of the field we establish the quadratic consistency and the asymptotic normality of the spectral density estimator.

**Mots-clés:** Estimation, densité spectrale, champ aléatoire stationnaire, échantillonnage poissonnien, consistance en moyenne quadratique, biais, normalité asymptotique.

## 1 Introduction

On considère un champ aléatoire stationnaire centré à valeurs réelles  $X = \{X(s, t) : s, t \in R\}$ , de moments d'ordre 2 finis et de fonction de covariance continue  $C_X : (u, v) \mapsto E\{X(s, t)X(s + u, t + v)\} \in L_1(R^2)$ . On se propose d'estimer sa densité spectrale  $f_X(\lambda, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} C_X(u, v) e^{-i\lambda u} e^{-i\alpha v} du dv$ , à partir d'observations discrètes  $\{X(\tau_k, \nu_j) : k \geq 1, j \geq 1\}$ , où  $\{\tau_k\}$  et  $\{\nu_j\}$  sont des processus de Poisson. Ce problème a été étudié par Lii et Masry (1994) pour des processus stationnaires indexés par  $R$ . Nous adoptons leur méthode au cas bi-dimensionnel.

Notre papier se présente comme suit. Dans la section 2, nous étudions le problème d'échantillonnage du champ  $X$ . Ensuite, dans la section 3, nous définissons un estimateur de  $f_X(\lambda, \alpha)$ , et dans la section 4, nous établissons respectivement la consistance en moyenne quadratique et la normalité asymptotique de cet estimateur.

## 2 Préliminaires et Hypothèses

Soient  $\tau$  et  $\nu$  deux processus de Poisson indépendants entre eux, et indépendants du champ  $X$ . Soit  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) le processus de comptage associé à  $\tau$  (resp.  $\nu$ ) et  $\beta_1 = E\{N_1([0; 1])\}$  (resp.  $\beta_2 = E\{N_2([0; 1])\}$ ) l'intensité moyenne du processus  $\tau$  (resp.  $\nu$ ).

Soit  $Z$  le processus échantillonné défini par :  $Z(s + ds, t + dt) = X(s, t)N_1(s + ds)N_2(t + dt)$  et  $\mu_Z$  la mesure  $\sigma$ -finie définie par :  $\mu_Z(du, dv) ds dt = Cov\{Z(s + ds, t + dt), Z(s + u + du, t + v + dv)\}$ , où  $N_1(s + ds)$  est le nombre de  $\tau_k$  dans  $]s, s + ds]$  et  $N_2(t + dt)$  le nombre de  $\nu_j$  dans  $]t, t + dt]$ .

La densité spectrale, notée  $f_Z(\lambda, \alpha)$ , du processus  $Z$  est définie par :

$$f_Z(\lambda, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} e^{-i\lambda u} e^{-i\alpha v} \mu_Z(du, dv).$$

Nous déduisons que,  $f_X(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\beta_1^2 \beta_2^2} f_Z(\lambda, \alpha) - \frac{1}{2\pi \beta_1^2 \beta_2} f_{Z_1}(\lambda) - \frac{1}{2\pi \beta_1 \beta_2^2} f_{Z_2}(\alpha) + \frac{1}{(2\pi)^2 \beta_1 \beta_2} C_X(0, 0)$ ,  
où  $f_{Z_1}(\lambda) = \frac{\beta_1 C_X(0, 0)}{2\pi} + \beta_1^2 f_X^{(1)}(\lambda)$ ,  $f_{Z_2}(\alpha) = \frac{\beta_2 C_X(0, 0)}{2\pi} + \beta_2^2 f_X^{(2)}(\alpha)$ ,  
 $f_X^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_R C_X(u, 0) e^{-i\lambda u} du$  et  $f_X^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_R C_X(0, v) e^{-i\alpha v} dv$ .

## Les hypothèses

**Hypothèse 2.1** Soit  $W$  une fonction réelle continue, paire et positive, satisfaisant les conditions suivantes :  $W \in L_1 \cap L_\infty$ ,  $\int_R W(\lambda) d\lambda = 1$  et  $w(u) := \int_R W(\lambda) e^{i\lambda u} d\lambda \in L_1$ .

**Hypothèse 2.2** Soit  $K \geq 2$ . Pour tout  $k = 2, \dots, K$ , et tout  $j = 1, \dots, k-1$ ,

$$\int_{R^{2k-2}} (1 + |u_j|)(1 + |v_j|) \left| C_X^{(k)}((u_1; v_1), (u_2; v_2), \dots, (u_{k-1}; v_{k-1})) \right| du_1 \dots du_{k-1} dv_1 \dots dv_{k-1} < +\infty,$$

où  $C_X^{(k)}$  est le cumulatif d'ordre  $k$  de  $X$ .

## 3 Définition de l'estimateur de la densité spectrale

Un estimateur de la densité spectrale  $f_X(\lambda, \alpha)$  est défini comme suit :

$$\hat{f}_X(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\beta_1^2 \beta_2^2} \hat{f}_Z(\lambda, \alpha) - \frac{1}{2\pi \beta_1^2 \beta_2} \hat{f}_{Z_1}(\lambda) - \frac{1}{2\pi \beta_1 \beta_2^2} \hat{f}_{Z_2}(\alpha) + \frac{1}{(2\pi)^2 \beta_1 \beta_2} \hat{C}_X(0, 0),$$

où

$$\begin{aligned} \hat{C}_X(0, 0) &= \frac{1}{\beta_1 \beta_2 T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} X^2(s, t) N_1(s + ds) N_2(t + dt), \\ \hat{f}_Z(\lambda, \alpha) &= \int_{R^2} W_{T_1}(\lambda - u) W_{T_2}(\alpha - v) I_{T_1, T_2}(u, v) du dv, \\ \hat{f}_{Z_1}(\lambda) &= \int_R W_{T_1}(\lambda - u) I_{T_1, T_2}^{(1)}(u) du, \quad \hat{f}_{Z_2}(\alpha) = \int_R W_{T_2}(\alpha - v) I_{T_1, T_2}^{(2)}(v) dv, \\ I_{T_1, T_2}^{(1)}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi \beta_2 T_1 T_2} \int_0^{T_2} |d_{Z, T_1}(\lambda, t)|^2 N_2(t + dt), \quad I_{T_1, T_2}^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi \beta_1 T_1 T_2} \int_0^{T_1} |d_{Z, T_2}(s, \alpha)|^2 N_1(s + ds), \\ I_{T_1, T_2}(\lambda, \alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^2 T_1 T_2} \left| \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} X(s, t) e^{-i\lambda s} e^{-i\alpha t} N_1(s + ds) N_2(t + dt) \right|^2, \\ d_{Z, T_1}(\lambda, t) &= \int_0^{T_1} X(s, t) e^{-i\lambda s} N_1(s + ds), \quad d_{Z, T_2}(s, \alpha) = \int_0^{T_2} X(s, t) e^{-i\alpha t} N_2(t + dt) \\ W_{T_j}(u) &= \frac{1}{b_{T_j}} W\left(\frac{u}{b_{T_j}}\right), \text{ avec } b_{T_j} \rightarrow 0 \text{ lorsque } T_j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

A partir des observations  $\{X(\tau_k, \nu_j)\}_{1 \leq k \leq N(T_1), 1 \leq j \leq N(T_2)}$ , l'estimateur de la densité spectrale s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{f}_X(\lambda, \alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^2 T_1 T_2 \beta_1^2 \beta_2^2} \sum_{k=1, k \neq m}^{N(T_1)} \sum_{j=1, j \neq n}^{N(T_2)} \sum_{m=1}^{N(T_1)} \sum_{n=1}^{N(T_2)} X(\tau_k, \nu_j) X(\tau_m, \nu_n) e^{-i\lambda(\tau_k - \tau_m)} e^{-i\alpha(\nu_j - \nu_n)} \\ &\quad \times w[b_{T_1}(\tau_k - \tau_m)] w[b_{T_2}(\nu_j - \nu_n)]. \end{aligned}$$

## 4 Propriétés de l'estimateur

### 4.1 Consistance en moyenne quadratique

**Théorème 4.1** *On suppose que  $X$  est un champ aléatoire stationnaire centré à valeurs réelles dont la fonction d'autocovariance  $C_X \in L_1(R^2)$  satisfait les conditions suivantes :  $uC_X(u, 0), vC_X(0, v) \in L_1(R)$ . Alors, l'estimateur  $\hat{f}_X(\lambda, \alpha)$  de la densité spectrale est asymptotiquement sans biais.*

**Corollaire 4.1** *On suppose les hypothèses du théorème 4.1 satisfaites.*

*Soit  $N$  un entier naturel non nul tel que :*

*(i)  $u^k v^N C_X(u, v) \in L_1(R^2)$ ,  $u^N v^p C_X(u, v) \in L_1(R^2)$ , pour  $k, p = 0, 1, \dots, N$ ,*

*(ii)  $w(\cdot)$  est  $N$ -fois différentiable, avec  $w^{(N)}(\cdot)$  bornée et continue.*

*Alors,*

$$\begin{aligned} E \left\{ \hat{f}_X(\lambda, \alpha) \right\} &= f_X(\lambda, \alpha) + \sum_{(k,p) \in \Lambda_N^*} \frac{(ib_{T_1})^k (ib_{T_2})^p w^{(k)}(0) w^{(p)}(0)}{k! p!} \frac{\partial^{k+p}}{(\partial x)^k (\partial y)^p} f_X(\lambda, \alpha) \\ &\quad + o(b_{T_1}^N) + o(b_{T_2}^N) + O\left(\frac{1}{T_1}\right) + O\left(\frac{1}{T_2}\right), \quad \text{où } \Lambda_N^* = [0, \dots, N] \times [0, \dots, N] \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Comme  $w^{(1)}(0) = 0$ , le biais de  $\hat{f}_X(\lambda, \alpha)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{biais} \left\{ \hat{f}_X(\lambda, \alpha) \right\} &= -\frac{b_{T_1}^2 w^{(2)}(0)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_X(\lambda, \alpha) - \frac{b_{T_2}^2 w^{(2)}(0)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_X(\lambda, \alpha) + \frac{b_{T_1}^2 b_{T_2}^2 [w^{(2)}(0)]^2}{4} \frac{\partial^4}{(\partial x)^2 (\partial y)^2} f_X(\lambda, \alpha) \\ &\quad + o(b_{T_1}^2) + o(b_{T_2}^2) + O\left(\frac{1}{T_1}\right) + O\left(\frac{1}{T_2}\right). \end{aligned}$$

**Théorème 4.2** *On suppose les hypothèses 2.1 et 2.2 satisfaites avec  $K = 4$ , et  $b_{T_j} \rightarrow 0$  tel que  $T_j b_{T_j} \rightarrow \infty$  ( $j = 1, 2$ ). Alors, pour tous  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$ , on a :*

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left\{ \hat{f}_X(\lambda_1, \alpha_1), \hat{f}_X(\lambda_2, \alpha_2) \right\} &= \frac{(2\pi)^2}{T_1 T_2 b_{T_1} b_{T_2} \beta_1^4 \beta_2^4} f_Z^2(\lambda_1, \alpha_1) [\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\alpha_1, \alpha_2} + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}] \left( \int_R W^2(u) du \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\pi \beta_1^4 \beta_2^4 T_1 T_2 b_{T_1}} f_Z^2(\lambda_1) \times (\delta_{\lambda_1, \lambda_2} + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2}) \times \int_R W^2(u) du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi \beta_1^3 \beta_2^4 T_1 T_2 b_{T_2}} f_Z^2(\alpha_1) \times (\delta_{\alpha_1, \alpha_2} + \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}) \times \int_R W^2(u) du \\ &\quad + O\left(\frac{1}{T_1}\right) + O\left(\frac{1}{T_2}\right) + o\left(\frac{1}{T_1 T_2 b_{T_1} b_{T_2}}\right) + O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right). \end{aligned}$$

### 4.2 Normalité asymptotique

On pose  $C_o(R^+, ]0; 1]) = \{g \in C(R^+) : 0 < g < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0\}$ , où  $C(R^+)$  est l'ensemble des fonctions réelles continues et définies sur  $R^+ = [0; +\infty[$ .

**Théorème 4.3** *On suppose que les hypothèses du théorème 4.2 sont satisfaites et que*

*$T_1 \mapsto b_{T_1}, T_2 \mapsto b_{T_2} \in C_o(R^+, ]0; 1])$  telles que  $c_1 T_1 + c_2 T_2 = o\left(\frac{1}{b_{T_1} b_{T_2}}\right)$ , pour tous réels positifs  $c_1, c_2$ .*

*Alors, pour tous  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$ , on a :*

$$\begin{aligned} T_1 T_2 b_{T_1} b_{T_2} \text{Cov} \left\{ \hat{f}_X(\lambda_1, \alpha_1), \hat{f}_X(\lambda_2, \alpha_2) \right\} &= \frac{(2\pi)^2}{\beta_1^4 \beta_2^4} f_Z^2(\lambda_1, \alpha_1) [\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\alpha_1, \alpha_2} + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}] \\ &\quad \times \left( \int_R W^2(u) du \right)^2 + o(1) + O\left(\sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}\right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

**Théorème 4.4** *On suppose que les hypothèses du théorème 4.3 sont satisfaites et que pour  $j = 1, 2$ ,  $b_{T_j} = O(T_j^{-\gamma_j})$ , avec  $\frac{1}{2} < \gamma_j < 1$ . Alors, les variables  $\left\{ (T_1 T_2 b_{T_1} b_{T_2})^{\frac{1}{2}} \left\{ \widehat{f}_X(\lambda_i, \alpha_i) - E \left\{ \widehat{f}_X(\lambda_i, \alpha_i) \right\} \right\}_{i=1}^n \right\}$  sont conjointement, asymptotiquement normales de moyenne nulle et de covariances données par (4.1).*

**Remarques :**

- Pour  $b_{T_j} = O(T_j^{-\gamma_j})$ ,  $j = 1, 2$ , on a :  $c_1 T_1 + c_2 T_2 = o\left(\frac{1}{b_{T_1} b_{T_2}}\right)$  si et seulement si  $T_1^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_2}} \ll T_2 \ll T_1^{\frac{\gamma_1}{1-\gamma_2}}$ .
- Si  $w^{(2)}(0) = 0$ , alors le théorème 4.4 de normalité asymptotique est encore valable lorsque l'on remplace  $E \left\{ \widehat{f}_X(\lambda_i, \alpha_i) \right\}$  par  $f_X(\lambda_i, \alpha_i)$ .

## 5 Discussion et exemple

(i) On suppose les hypothèses du corollaire 4.1 satisfaites pour  $N \geq 2$ . Alors la vitesse de convergence de l'estimateur de la densité spectrale est :  $T_1^{\gamma_1-1} T_2^{\gamma_2-1}$ .

(ii) Si  $\widehat{f}_{X,C}(\lambda, \alpha)$  est l'estimateur classique de  $f_X(\lambda, \alpha)$  pour les observations  $\{X(s, t) : 0 \leq s \leq T_1, 0 \leq t \leq T_2\}$ , alors  $\widehat{f}_{X,C}(\lambda, \alpha)$  a le même biais que  $\widehat{f}_X(\lambda, \alpha)$  et sa variance est (Parzen, 1967) :

$$\text{Var} \left\{ \widehat{f}_{X,C}(\lambda, \alpha) \right\} = \frac{(2\pi)^2}{T_1 T_2 b_{T_1} b_{T_2}} f_X^2(\lambda, \alpha) (1 + \delta_{0,\lambda} \delta_{0,\alpha}) \left( \int_R W^2(u) du \right)^2 + o\left(\frac{1}{T_1 T_2 b_{T_1} b_{T_2}}\right) + O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right).$$

En remarquant que  $V_P(\lambda, \alpha) := \frac{1}{\beta_1^4 \beta_2^4} f_Z^2(\lambda, \alpha) > f_X^2(\lambda, \alpha)$ , pour tout  $(\lambda, \alpha)$ , la comparaison en moyenne quadratique de ces deux estimateurs peut être faite à l'aide du coefficient d'approximation :

$$K(\lambda, \alpha) := \frac{V_P(\lambda, \alpha) - f_X^2(\lambda, \alpha)}{V_P(\lambda, \alpha)}.$$

Il est clair que  $0 < K(\lambda, \alpha) < 1$ , pour tout  $(\lambda, \alpha)$ .

Comme exemple, considérons le champ :  $X(s, t) = X_1(s)X_2(t)$ , où  $X_1$  et  $X_2$  sont deux processus stationnaires centrés indépendants, de fonctions d'autocovariance respectives  $C_1(u) = \sigma_1^2 e^{-\rho_1 |u|}$  et  $C_2(v) = \sigma_2^2 e^{-\rho_2 |v|}$ , avec  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 > 0$ . On vérifie que :

$$\begin{aligned} f_X(\lambda, \alpha) &= \frac{\rho_1 \rho_2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\pi^2 (\rho_1^2 + \lambda^2) (\rho_2^2 + \alpha^2)}, \\ V_P(\lambda, \alpha) &= \left( \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\pi} \right)^4 \left\{ \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1^2 + \lambda^2) (\rho_2^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{4\beta_1 \beta_2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\rho_1}{\beta_2 (\rho_1^2 + \lambda^2)} + \frac{\rho_2}{\beta_1 (\rho_2^2 + \alpha^2)} \right] \right\}^2, \end{aligned}$$

et que  $V_P(\lambda, \alpha) > f_X^2(\lambda, \alpha)$ .

La figure 1 illustre l'écart relatif en moyenne quadratique des estimateurs  $\widehat{f}_{X,C}(\lambda, \alpha)$  et  $\widehat{f}_X(\lambda, \alpha)$  pour  $\rho_1 = \rho_2 = \pi$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $(\lambda, \alpha) \in [-10; 10]^2$  et 3 valeurs respectives (0.4, 0.5), (1, 5) et (7, 9) de  $(\beta_1, \beta_2)$ . Elle montre aussi que l'on a une meilleure approximation de la densité spectrale  $f_X(\lambda, \alpha)$ , lorsque les intensités moyennes  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ont de grandes valeurs.

## Annexe

### Preuve du théorème 4.1

Grâce à l'hypothèse 2.2, nous montrons que :

$$E(I_{T_1, T_2}(\lambda, \alpha)) = \frac{1}{(2\pi)^2 T_1 T_2} [(2\pi)^2 T_1 T_2 f_Z(\lambda, \alpha) + O(1)] = f_Z(\lambda, \alpha) + O\left(\frac{1}{T_1 T_2}\right).$$

Nous montrons aussi que :

$$\begin{aligned} E \left\{ \widehat{f}_{Z_1}(\lambda) \right\} &= \int_R W(u) f_{Z_1}(\lambda - b_{T_1} u) du + O\left(\frac{1}{T_1}\right), \quad E \left\{ \widehat{f}_{Z_2}(\alpha) \right\} = \int_R W(v) f_{Z_2}(\alpha - b_{T_2} v) dv + O\left(\frac{1}{T_2}\right), \\ E \left\{ \widehat{C}_X(0, 0) \right\} &= \frac{1}{\beta_1 \beta_2 T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} C_X(0, 0) \beta_1 \beta_2 ds dt = C_X(0, 0). \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient en utilisant le théorème de convergence dominée.

### Preuve du corollaire 4.1

En réécrivant  $E \left\{ \widehat{f}_X(\lambda, \alpha) \right\}$ , on obtient

$$E \left\{ \widehat{f}_X(\lambda, \alpha) \right\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} e^{-i\lambda r} e^{-i\alpha l} w(b_{T_1} r) w(b_{T_2} l) C_X(r, l) dr dl + O\left(\frac{1}{T_1}\right) + O\left(\frac{1}{T_2}\right).$$

Le résultat s'obtient en développant  $w(t)$  en séries de Taylor avec reste intégral.

### Preuve du théorème 4.2

$Cov \left\{ \widehat{f}_X(\lambda_1, \alpha_1), \widehat{f}_X(\lambda_2, \alpha_2) \right\} = \sum_{i=1}^{16} J_i$ , où

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\beta_1^4 \beta_2^4} Cov \left\{ \widehat{f}_Z(\lambda_1, \alpha_1), \widehat{f}_Z(\lambda_2, \alpha_2) \right\} \\ &= \frac{(2\pi)^2}{T_1 T_2 b_{T_1} b_{T_2} \beta_1^4 \beta_2^4} f_{Z_1}^2(\lambda_1, \alpha_1) [\delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\alpha_1, \alpha_2} + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}] \left( \int_R W^2(u) du \right)^2 + o\left(\frac{1}{T_1 T_2 b_{T_1} b_{T_2}}\right) + O\left(\frac{1}{T_1 T_2}\right), \\ J_6 &= \frac{1}{(2\pi)^2 \beta_1^4 \beta_2^4} Cov \left\{ \widehat{f}_{Z_1}(\lambda_1), \widehat{f}_{Z_1}(\lambda_2) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi \beta_1^4 \beta_2^3 T_1 T_2 b_{T_1}} f_{Z_1}^2(\lambda_1) \times (\delta_{\lambda_1, \lambda_2} + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2}) \times \int_R W^2(u) du + o\left(\frac{1}{T_1 T_2 b_{T_1}}\right) + O\left(\frac{1}{T_1 T_2}\right) + O\left(\frac{1}{T_2}\right), \\ J_{11} &= \frac{1}{(2\pi)^2 \beta_1^3 \beta_2^4} Cov \left\{ \widehat{f}_{Z_2}(\alpha_1), \widehat{f}_{Z_2}(\alpha_2) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi \beta_1^3 \beta_2^4 T_1 T_2 b_{T_2}} f_{Z_2}^2(\alpha_1) \times (\delta_{\alpha_1, \alpha_2} + \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}) \times \int_R W^2(u) du + o\left(\frac{1}{T_1 T_2 b_{T_2}}\right) + O\left(\frac{1}{T_1 T_2}\right) + O\left(\frac{1}{T_1}\right), \\ J_{16} &= \frac{1}{(2\pi)^4 \beta_1^2 \beta_2^2} Var \left( \widehat{C}_X(0, 0) \right) = O\left(\frac{1}{T_1 T_2}\right) \end{aligned}$$

et, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que  $W_{T_j} \in L_1$ ,

$$\begin{aligned} J_2 &= O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right), \quad J_3 = O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right), \quad J_4 = O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right), \quad J_5 = O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right), \\ J_7 &= O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right), \quad J_8 = O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1}}}\right), \quad J_9 = O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right), \quad J_{10} = O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right), \\ J_{12} &= O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_2}}}\right), \quad J_{13} = O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1} b_{T_2}}}\right), \quad J_{14} = O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_1}}}\right), \quad J_{15} = O\left(\frac{1}{T_1 T_2 \sqrt{b_{T_2}}}\right). \end{aligned}$$

### Preuve du théorème 4.3

Pour prouver ce théorème, il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{2\pi \beta_1^4 \beta_2^3 T_1 T_2 b_{T_1}} f_{Z_1}^2(\lambda_1) \times (\delta_{\lambda_1, \lambda_2} + \delta_{\lambda_1, -\lambda_2}) \times \int_R W^2(u) du = o\left(\frac{1}{T_1 T_2 b_{T_1} b_{T_2}}\right),$$

$$\frac{1}{2\pi\beta_1^3\beta_2^4T_1T_2b_{T_2}}f_{Z_2}^2(\alpha_1) \times (\delta_{\alpha_1,\alpha_2} + \delta_{\alpha_1,-\alpha_2}) \times \int_R W^2(u)du = o\left(\frac{1}{T_1T_2b_{T_1}b_{T_2}}\right),$$

et que pour tous réels positifs  $c_1, c_2$ , on a  $\frac{c_1T_1+c_2T_2}{T_1T_2} = o\left(\frac{1}{T_1T_2b_{T_1}b_{T_2}}\right)$ , car  $c_1T_1 + c_2T_2 = o\left(\frac{1}{b_{T_1}b_{T_2}}\right)$ .

#### Preuve du théorème 4.4

On vérifie que :  $Cov\left\{\widehat{f}_{Z_j}(\lambda), \widehat{f}_{Z_j}(\alpha)\right\} = O\left(\frac{1}{T_1T_2b_{T_j}}\right)$ , pour  $j = 1, 2$ . Donc pour montrer ce théorème, il suffit de montrer que tous les cumulants croisés d'ordre  $k \geq 3$  de  $\left\{\sqrt{T_1T_2b_{T_1}b_{T_2}}\widehat{f}_Z(\lambda_j, \alpha_j)\right\}_{j=1,\dots,k}$  tendent vers zéro lorsque  $T_1, T_2 \rightarrow \infty$ .

En utilisant les étapes de la preuve du théorème 4.1 de Lii et Masry (1994) nous obtenons, pour  $k \geq 3$

$$\begin{aligned} & (T_1T_2b_{T_1}b_{T_2})^{\frac{k}{2}} Cum\left\{\widehat{f}_Z(\lambda_1, \alpha_1), \dots, \widehat{f}_Z(\lambda_k, \alpha_k)\right\} \\ &= O\left((T_1T_2)^{1-\frac{k}{2}}\right) + O\left(\left(\frac{b_{T_1}b_{T_2}}{T_1T_2}\right)^{\frac{k}{2}-1}\right) + O\left(\left(\frac{1}{T_1T_2}\right)^{\frac{k}{2}-1}(b_{T_1}b_{T_2})^{\frac{k}{2}-2}\ln T_1 \ln T_2\right) + \dots + O\left(\frac{(\ln T_1 \ln T_2)^{k-2}}{(T_1T_2b_{T_1}b_{T_2})^{\frac{k}{2}-1}}\right), \end{aligned}$$

qui tend vers zéro, car  $b_{T_j} = O\left(T_j^{-\gamma_j}\right)$  et  $\frac{1}{2} < \gamma_j < 1$ .

## Bibliographie

- [1] K.S. Lii, E. Masry (1994) Spectral estimation of continuous-time stationary processes from random sampling. Stochastic Processes and their Applications 52, pp. 39 – 64.
- [2] E. Parzen (1967) Time Series Analysis Papers. Holden-Day, San Fransisco.

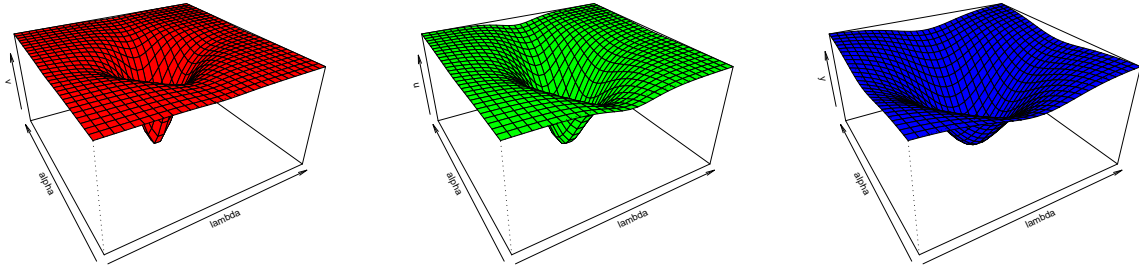


Figure 1: Coefficient d'approximation K pour 3 valeurs de  $(\beta_1, \beta_2)$ .